Aufgabe 1.

a) *Reguläre Grammatik*
$G = (\{U, V, W, S\}, \{a, b\}, P, S)$
$P = \{$

```
U ::= bU|b
V ::= bV|aU|a
W ::= bW|aV
S ::= bS|aW
```

$\}$

b) *Kontextfreie Grammatik*
$G = (\{U, S\}, \{a, b\}, P, S)$
$P = \{$

```
U ::= ab|ba|UU
S ::= [U]a[U]a[U]a[U]
```

$\}$

Aufgabe 2.

a) Die Sprache $L(G)$ kann Wörter ableiten, die aus den Buchstaben a und b bestehen, wobei die Anzahl der a's immer doppelt so groß ist wie die Anzahl der b's. Außerdem ist die Anzahl unmittelbarer Wiederholungen von a's immer geradzahlig, wogegen b auch in ungeradzahligen Wiederholungen gereiht sein kann.

b) *Ableitungsbäume für* `aabaab`
Hinweis: `e` soll das leere Wort ϵ darstellen.

```
       S          S
      /           |
     SS          aaSb
    /  \          |
aaSb  aaSb        bSaa
  |     |         |
  e     e         e
```

Aufgabe 3.
Zu zeigen: $X = Y$
$W = V \cup \sum$
$X = W^* V W^*$
$Y = W^* \backslash \sum^*$
$V \cap \sum = \emptyset$
Bemerkung: $(\epsilon \in \sum^*) \Rightarrow (\epsilon \notin Y)$
Mengengleichheit wird im Allgemeinen durch das Nachweisen der antisymmetrischen Teilmengenrelation von X und Y bewiesen.
Für ein Alphabeth A gelten folgende Regeln:

(1) Ein Wort $\omega \in A^*$ ist ein geordnetes Tupel von $n \geq 0$ Buchstaben aus A.

(2) Die Kombination eines Wortes $\omega_1 \in A^*$ mit einem Element $a \in A$ zu $\omega_1 a = \omega_2$ (oder $a\omega_1 = \omega_2$) ist auch wieder ein Wort von A^*.

(3) Die Kombination zweier Wörter $\omega_1, \omega_2 \in A^*$ zu einem neuen Wort $\omega_1\omega_2 = \omega_3$ ist auch wieder ein Wort von A^*.

Teilschritt 1: Zeige, dass $X \subseteq Y$:
Für alle $\omega_1, \omega_2 \in W^*$ und $v \in V$ gilt: $\omega_1 v \omega_2 \in X$
Da $\omega_1 \in W^*$ und $v \in (V \cup \sum = W)$ gilt gemäß Regel 2: $(\omega_1 v = \omega_3) \in W^*$
Da $\omega_2 \in W^*$ gilt desweiteren gemäß Regel 3: $(\omega_3\omega_2 = \omega) \in W^*$
Da $v \notin \sum$ ist $(\omega_1 v = \omega_3) \notin \sum^*$ und somit auch $(\omega_3\omega_2 = \omega) \notin \sum^*$
Also ist $(\omega_1 v \omega_2 = \omega_4) \in W^* \setminus \sum^*$ und es gilt: $X \subseteq Y$

Teilschritt 2: Zeige, dass $X \supseteq Y$:
Für alle $\omega \in Y$ gilt: $\omega \in W^*$ und $\omega \notin \sum^*$
Da ω nicht in $\sum^*$ liegt, muss es mindestens einen Buchstaben enthalten, der nicht Element von $\sum$ ist. Da $W = V \cup \sum$ muss dieser Buchstabe Element von V sein. Das bedeutet:
$\forall \omega \in Y\ \exists\ v \in V, v \in \omega$ (Für alle ω aus Y existiert ein v aus V, welches in ω enthalten ist.)
Somit ist das Kriterium $\omega \notin \sum^*$ erfüllt und die restlichen Buchstaben können aus ganz W sein (das bedeutet, die restlichen Teilwörter sind Element von W^*).
Da $v \in V$ und $\omega_1 \in W^*$ gilt gemäß Regel 2 und eben genannter Bedingungen: $(v\omega_1 = \omega_2) \in Y$
Da $\omega_2 \in Y$ und $\omega_3 \in W^*$ gilt gemäß Regel 3: $(\omega_3\omega_2 = \omega) \in Y$
Wir sehen: $\omega = \omega_3\omega_2 = \omega_3 v \omega_1 \in (W^* V W^* = X)$, und somit gilt: $Y \subseteq X$

Da $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$ ist bewiesen: $X = Y$ q.e.d

Aufgabe 4.

a) Typ 2 (Die Grammatik ist *nicht* Typ 3, da die Ableitungsregel $S \to SS$ kein Terminalsymbol enthält).

b) $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$
$P = \{$

```
S ::= ab[S]
S ::= ba[S]
S ::= aa[S]
S ::= bb[S]
```

$\}$