Aufgabe 1.

a) $G_1 = \{\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S\}$

```
S ::= AC|AB
A ::= a
B ::= b
C ::= SB
```

b) $G_1 = \{\{S, B\}, \{a, b\}, P, S\}$

```
S ::= aSB|aB
B ::= b
```

c) $G_2 = \{\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S\}$

```
S ::= SS|AC|CA
C ::= SB|BS|B
A ::= a
B ::= b
```

d) $G_2 = \{\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S\}$

```
S ::= aSBS|aSB|aBS|aB|bSAS|bSA|bAS|bA
A ::= a
B ::= b
```

Aufgabe 2.
Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Grammatik in CNF mit $G = \{V, \Sigma, P, S\}$. Jede Regel aus P ist gemäß Definition in der Form:
$(v_1 \to v_2 v_3) : v_1, v_2, v_3 \in V$ oder: $(v_1 \to \sigma) : v_1 \in V, \sigma \in \Sigma$
Durch Konstruktion einer neuen Grammatik $G' = \{V, \Sigma, P', S\}$ mit
$P' = \{(v_1 \to v_3 v_2) : (v_1 \to v_2 v_3) \in P\} \cup \{(v_1 \to \sigma) \in P\}$
entsteht eine Sprache L' mit folgenden Eigenschaften:

- Da sich P' genau spiegelverkehrt verhält wie P, ließt L' genau die **Wörter aus L rückwärts**. Also $L' = \{w^R : w \in L\}$.
- Da alle Regeln dem Aufbau einer CNF entsprechen, ist L' **kontextfrei**.

Aufgabe 3.
Zu zeigen: Der Schnitt einer kontextfreien mit einer regulären Sprache ist wieder kontextfrei.
Beweis: Sei

$$M_1 = (Z_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, z_{01}, \#, E_1)$$

ein Kellerautomat (mit Endzustandsmenge E_1) für die Sprache L_1 und sei

$$M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E)$$

ein DFA für die Sprache L_2. Es lässt sich ein Kellerautomat M_3 (desselben Typs wie M_1) konstruieren, der die Sprache $L_1 \cap L_2$ erkennt. Es ist

$$M_3 = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \Gamma, \delta_3, (z_{01}, z_{02}), \#, E_1 \times E_2)$$

wobei

$$\delta_3((z_1, z_2), a, A) \ \ni \ ((z_1', z_2'), B_1 \dots B_k)$$

falls

$$\delta_1(z_1, a, A) \ \ni \ (z_1', B_1 \dots B_k)$$

und

$$\delta_2(z_2, a) = z_2'$$

Aufgabe 4.
„Nicht kontextfrei“–Beweise mit Hilfe des Pumping Lemma:

a) Gefordert: Jedes w_i nur ein mal!
Beweis: Sei $n \in I\!N$ gegeben. Bei der $uvwxy$–Zerlegung muss entweder $|v|$ oder $|x|$ größer als 0 sein, und $|vx| \leq n$ sein. Für diesen Fall gibt es zwei Möglichkeiten (betrachte jeweils nur x, da dasselbe jeweils auch für v analog gelten kann):

(1) u enthält mindestens ein \$–Zeichen, dann gilt spätestens für $x^3 = xxx$, dass sich ein Teilwort zwischen den \$–Zeichen wiederholt hat, und das Wort nicht mehr in der Sprache L liegt.

(2) x besteht aus $\{a, b\}^+$, also einem Teil eines bestimmten w_k, also $w_k = sxt$. Da jedes Wort aus L mit $|z| \geq n$ sich zerlegen lassen muss, also auch das Wort $z\$sxxt$ (sofern $sxxt$ nicht sowieso schon in z enthalten ist), tritt für $i = 2$ mit $x^2 = xx$ eine Wiederholung auf und das Wort ist nicht mehr in L. Damit ist gezeigt: L ist nicht kontextfrei!

b) Gefordert: jedes w muss deklariert sein (als v)!
Sei n gegeben, wähle ein Wort aus L' mit n Variablen, die Zerlegung $uvwx$ kann also nur im Bereich der Variablendeklaration liegen. Da jedes Wort aus L', das länger als n ist, mit $uvwxy$ zerlegbar sein muss, gilt dies auch für das Wort, in dem es für jedes w_i genau ein v_j gibt. Da jedes v_j sowohl einmalig, als auch notwendig für L' ist, führt jede Wiederholung von x mit $i = 0$ in der Variablendeklaration dazu, dass das Wort nicht mehr in L' liegt, da entweder eine Variable in ihrer Länge verkürzt wird, oder zwei Variablen miteinander verbunden werden (wenn x ein \$ enthält). Somit ist gezeigt: L' ist nicht kontextfrei!